Zusammenfassung der Kurvendiskussion

Diskussionspunkte

1. Größtmögliche Definitionsmenge D_f
2. Symmetrieeigenschaften des Graphen G_f
3. Nullstellen, Polstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse, Vielfachheit der Nullstellen, Felder abstreichen
4. Verhalten für $x \to \pm\infty$, Asymptoten
5. Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
6. Extrempunkte von $f(x)$
7. Monotonieverhalten von $f(x)$
8. Wendepunkte von $f(x)$
9. Krümmungsverhalten von $f(x)$
10. Zeichnen des Graphen G_f von $f(x)$ mit Asymptoten

Allgemeines

Allgemeine Form einer gebrochen rationalen Funktion:

$$y = \frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}$$

Ist n der Grad des Zählers und m der Grad des Nenners einer gebrochen rationalen Funktion, so existieren höchstens n Nullstellen und höchstens m Polstellen. Die Ableitungen sind immer über die Quotientenregel zu bestimmen.

0.1 Größtmögliche Definitionsmenge

$$D_{max} = \{x \in \mathbf{R} \,|\, \text{Nenner} \neq 0\}$$

Die Nullstellen des Nenners sind Definitionslücken (Polstellen) der Funktion, falls nicht zugleich der Zähler Null ist. In diesem Fall spricht man von einer behebbaren Definitionslücke.

Vorgehensweise:
Setzen Sie den Nenner=0 und lösen Sie die entstehende Gleichung.

0.2 Symmetrieeigenschaften des Graphen G_f

Achsensymmetrie zur y-Achse:	$f(-x) = f(x)$
Punktsymmetrie zum Ursprung:	$f(-x) = -f(x)$
Sonst:	keine einfache Symmetrie

Vorgehensweise:
Ersetzen Sie in der Funktionsgleichung jedes x durch ein $(-x)$ und vergleichen Sie das Ergebnis $f(-x)$ mit den Funktionstermen $f(x)$ bzw. $-f(x)$.

Überprüfen bzw. beachten Sie die gefundene Symmetrie beim Aufstellen einer Wertetabelle, beim Aufsuchen charakteristische Punkte und beim Zeichnen des Graphen.

0.3 Nullstellen, Polstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse, Vielfachheit der Nullstellen, Felder abstreichen

0.3.1 Nullstellen der Funktion

Ein Bruchterm ist nur dann gleich Null, wenn der Zähler gleich Null und der Nenner ungleich Null ist.

Vorgehensweise:
Setzen Sie den Zähler=0 und ermitteln Sie die Lösung(en) der entstehenden Gleichung.

Die Nullstellen des Zählers, an denen der Nenner ungleich Null ist (Definitionsbereich D_{max} beachten!), sind die Nullstellen der Funktion.

0.3.2 Polstellen der Funktion

Die Polstellen werden in der Regel zusammen mit D_{max} bestimmt. Man unterscheidet:

Polstellen mit Vorzeichenwechsel:	links- und rechtsseitiger Grenzwert sind unterschiedlich
Polstellen ohne Vorzeichenwechsel:	links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein

Vorgehensweise:
Setzen Sie den Nenner=0 (wie bei der Bestimmung von D_{max}). Es können zwei Fälle auftreten:

Fall 1: Die Nullstelle des Nenners ist auch Nullstelle des Zählers (kann in Faktorzerlegung „herausgekürzt“ werden).
→ Es handelt sich um eine *Lücke* im Graphen.

Fall 2: Die Nullstelle des Nenners bleibt auch nach dem Kürzen mit Nullstellen des Zählers erhalten.
→ Es handelt sich um eine *Polstelle*, eine *senkrechte Asymptote* im Graphen.

- hat die Nullstelle eine ungerade Vielfachheit (1, 3, 5, ...) so handelt es sich um eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW); d. h. die Funktionswerte streben auf einer Seite der Polstelle gegen $+\infty$ und auf der anderen Seite gegen $-\infty$.
- liegt eine Nullstelle mit gerader Vielfachheit (2, 4, 6, ...) vor, so handelt es sich um eine Polstelle ohne VZW; d. h. die Funktionswerte streben auf beiden Seiten der Polstelle gegen $+\infty$ oder $-\infty$.

0.3.3 Schnittpunkt mit der y-Achse

Vorgehensweise:
Berechnung von $f(0)$.

0.3.4 Vielfachheit der Nullstellen

Einfache Nullstelle:	$f(x)$ wechselt das Vorzeichen von + nach - oder von - nach + beim Schneiden der x-Achse
Doppelte Nullstelle:	Extrempunkt; $f(x)$ berührt die x-Achse lediglich; kein VZW der Funktionswerte
Dreifache Nullstelle:	Wendepunkt mit waagrechter Tangente (=Terrassenpunkt); VZW der Funktionswerte beim Schneiden der x-Achse

0.3.5 Felder abstreichen

Mit den bisher berechneten Funktionswerten (Nullstellen, Polstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse) und den Regeln zur Vielfachheit von Nullstellen der Funktion kann man im Koordinatensystem des Graphen G_f bereits Felder zwischen Nullstellen und Polstellen, oberhalb und unterhalb der x-Achse markieren, worin der Graph der Funktion nie verlaufen wird.

0.4 Verhalten für $x \to \pm\infty$; Asymptoten

Gebrochen rationale Funktionen nähern sich für $x \to \pm\infty$ einer Asymptote an.

In Abhängigkeit vom Zählergrad n und Nennergrad m unterscheidet man dabei folgende Fälle:

$n < m$	:	Die x-Achse ist waagrechte Asymptote ($y_{Asymptote} = 0$)		
$n = m$	:	Eine Parallele zur x-Achse ist Asymptote ($y_{Asymptote} = \frac{a_n}{b_m}$)		
$n > m$	:	keine waagrechte Asymptote		
		Fall 1:	$n = m + 1$	$\to$ Die Asymptote ist eine schiefe Gerade.
		Fall 2:	$n > m + 1$	$\to$ Es gibt ein Näherungspolynom.

Vorgehensweise für $n > m$:
Mit einer Polynomdivision zerlegt man den Funktionsterm in einen ganzrationalen und einen echt gebrochen rationalen Anteil. Der ganzrationale Anteil liefert die Gleichung der Asymptoten $y_{Asymptote}$ (Gerade oder Näherungspolynom).

0.5 Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$

Bei gebrochen rationalen Funktionen kommt stets die Quotientenregel - bei Bedarf auch noch die Produkt- bzw. die Kettenregel - zum Einsatz:

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel:

$$f : y = f(x) \quad \text{und} \quad g : v = g(u) \quad \Rightarrow \quad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Merke: Die Definitionslücken der Funktion $f(x)$ sind stets auch Definitionslücken der Ableitung!

0.6 Extrempunkte von $f(x)$

Vorgehensweise:
Lösen Sie die Gleichung $f'(x) = 0$. Setzen Sie die gefundenen Lösungen in $f''(x)$ ein und bestimmen Sie über das Vorzeichen ($= sgn(f''(x_0))$) die Art der Extremstelle:

- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ Lokaler Tiefpunkt („TP“).
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ Lokaler Hochpunkt („HP“).
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ Untersuchung ob VZW bei $f'(x_0)$.
  - $f'(x)$ weist bei x_0 einen VZW von + nach - auf
    $\Rightarrow$ Lokaler Hochpunkt („HP“)
  - $f'(x)$ weist bei x_0 einen VZW von - nach + auf
    $\Rightarrow$ Lokaler Tiefpunkt („TP“)

0.7 Monotonieverhalten von $f(x)$

Extremstellen und Polstellen bilden eine Zerlegung von D_{max} in Teilintervalle. In jedem Teilintervall I bestimmt man durch eine Punktprobe das Vorzeichen von $f'(x)$:

$f'(x_0) > 0$: $f(x)$ verläuft in I streng monoton ansteigend
$f'(x_0) < 0$: $f(x)$ verläuft in I streng monoton abfallend

0.8 Wendepunkte von $f(x)$

Vorgehensweise:
Lösen Sie die Gleichung $f''(x) = 0$. Setzen Sie die gefundenen Werte in $f'''(x)$ ein und untersuchen Sie das Vorzeichen des Funktionswertes der dritten Ableitung. Gilt:

- $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt
- $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ Untersuchung ob VZW bei $f''(x_0)$

Liegt eine Wendestelle vor, und ist zusätzlich noch $f'(x_0) = 0$, so hat man eine besondere Wendestelle, einen Terrassenpunkt, gefunden.

0.9 Krümmungsverhalten

Wendestellen und Polstellen bilden eine Zerlegung von D_{max} in Teilintervalle. In jedem Teilintervall I bestimmt man durch eine Punktprobe das Vorzeichen von $f''(x)$:

$f''(x_0) > 0$: G_f ist linksgekrümmt
$f''(x_0) < 0$: G_f ist rechtsgekrümmt

0.10 Zeichnen des Graphen G_f von $f(x)$ mit Asymptoten

1. Zeichnen Sie alle markanten Punkte/Eigenschaften in ein passend gewähltes Koordinatensystem ein:
   - Nullstellen
   - Extrempunkte
   - Wendepunkte
   - Polstellen mit den senkrechten Polgeraden
   - Asymptoten
   - evtl. zusätzlich berechnete Hilfspunkte
2. Zeichnen Sie durch die Punkte „glatte“ Kurvenabschnitte. Schneiden Sie auf keinen Fall die Polgeraden. Achten Sie auf deutliche und korrekte Annäherung an die Asymptoten.
3. Kontrollieren Sie den Graphen auf Widersprüche. So muss sich beispielsweise zwischen Hoch- und Tiefpunkt immer ein Wendepunkt oder eine Polstelle befinden.

1 Übungsaufgabe

Gegeben sei die folgende, gebrochen rationale Funktion:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Untersuchen Sie diese Funktion unter Abarbeitung der auf Seite 1 aufgeführten Diskussionspunkte.

Soll eine Gruppenarbeit durchgeführt werden, so gilt nachfolgender Arbeitsauftrag.

- Arbeitsaufteilung für die Gruppen:
  - **Gruppe 1:** Bestimmung von D_{max}
  - **Gruppe 2:** Ermittlung der Nullstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse
  - **Gruppe 3:** Berechnung der Polstellen, Verhalten in der Umgebung der Polstellen
  - **Gruppe 4:** Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$, Asymptoten
  - **Gruppe 5:** Erste Ableitung
- Nun bestimmen alle Schüler:
  - Ausgehend vom Ergebnis der Gruppe 5 die zweite und dritte Ableitung (die Ergebnisse werden in der Klasse abgeglichen)
  - Monotonieverhalten von $f(x)$
  - Krümmungsverhalten von $f(x)$
  - Graphen von $f(x)$ mit den Asymptoten in ein geeignetes Koordinatensystem

2 Lösung

2.1 Größtmögliche Definitionsmenge D_f

$$D_{max} = \mathbf{R} \backslash \{-1; 1\}$$

2.2 Symmetrieeigenschaften des Graphen G_f

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$$

$$\Rightarrow -f(x) = f(-x)$$

Es liegt eine Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

2.3 Nullstellen, Polstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse, Vielfachheit der Nullstellen, Felder abstreichen

Bestimmung der Nullstellen von $f(x) \rightarrow$ Zähler von $f(x)$ gleich Null

$$x^3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{N1/2/3} = 0$$

$\rightarrow x_{N1/2/3}$ ist dreifache Nullstelle.
$\rightarrow$ Die x-Achse wird durchstoßen; Graph verläuft terrassenförmig.

Bestimmung der Polstellen von $f(x) \rightarrow$ Nenner von $f(x)$ gleich Null

$$x^2 - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{P1} = -1 \qquad x_{P2} = 1$$

$\rightarrow x_{P1}$ und x_{P2} sind jeweils einfache Nullstellen.
$\rightarrow$ Polstellen mit Vorzeichenwechsel.

Schnittpunkt mit y-Achse $\rightarrow$ x-Koordinate gleich Null

$$f(0) = \frac{0^3}{0^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad P_1(0|0)$$

2.4 Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$, Asymptoten

Da Zählergrad kleiner Nennergrad gilt:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow -\infty$$

Näherungspolynom der Asymptote entspricht dem ganzrationalen Anteil der Polynomdivision:

$$(x^3) : (x^2 - 1) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

Gleichung der Asymptote für $x \to \pm\infty$: $y = x$

2.5 Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

Erste Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{[(x^2-1)^2]^2} \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1) - 4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{4x^5 - 4x^3 - 6x^3 + 6x - 4x^5 + 12x^3}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

Dritte Ableitung:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{(6x^2+6)(x^2-1)^3 - (2x^3 + 6x) \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x}{[(x^2-1)^3]^2} \\ &= \frac{(6x^2+6)(x^2-1) - 6x \cdot (2x^3 + 6x)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{6x^4 - 6x^2 + 6x^2 - 6 - 12x^4 - 36x^2}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-6x^4 - 36x^2 - 6}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2-1)^4} \end{aligned}$$

2.6 Extrempunkte von $f(x)$

Bei Extrempunkten muss die erste Ableitung $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ Null sein. Eine Nullstelle der ersten Ableitung liegt vor, wenn der Zähler Null wird.

$$x^2(x^2-3) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_{1/2} &= 0 \\ x_3 &= \sqrt{3} \\ x_4 &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Untersuchung ob ein HP oder TP vorliegt über das Krümmungsverhalten an diesen Stellen (also über die zweite Ableitung).

- $f''(0) = 0 \quad \rightarrow \quad$ kein Extrempunkt
- $f''(\sqrt{3}) \approx 2,598 \quad \rightarrow \quad$ positiv $\rightarrow$ Linkskrümmung
  $\rightarrow \quad f(\sqrt{3}) \approx 2,6 \quad \rightarrow \quad$ Lokaler TP$(\sqrt{3}|2,6)$
- $f''(-\sqrt{3}) \approx -2,598 \quad \rightarrow \quad$ negativ $\rightarrow$ Rechtskrümmung
  $\rightarrow \quad f(-\sqrt{3}) \approx -2,6 \quad \rightarrow \quad$ Lokaler HP$(-\sqrt{3}|-2,6)$

2.7 Monotonieverhalten von $f(x)$

Nullstelle des Nenners braucht in der Tabelle nicht berücksichtigt werden, da sie aus D_{max} ausgeschlossen ist.

Intervalle	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < -1$	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	$1 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
x^2	+	+	+	+	0	+	+	+	+
x^2-3	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$(x^2-1)^2$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	−	0	−	−	0	+
Monotonie	↗	−−	↘	↘	−−	↘	↘	−−	↗

2.8 Wendepunkte von $f(x)$

Zweite Ableitung $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ muss Null sein. Eine Nullstelle der zweiten Ableitung liegt vor, wenn deren Zähler Null wird.

$$2x(x^2+3) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{WP} = 0$$

Überprüfen ob die hinreichende Bedingung $f'''(x_{WP}) \neq 0$ erfüllt ist:

$$f'''(0) = -6 \quad \rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x = 0$$

Koordinaten des Wendepunktes:

$$f(0) = 0 \quad \rightarrow \quad WP(0|0)$$

2.9 Krümmungsverhalten von $f(x)$

Pole und Wendepunkte legen die zu untersuchenden Intervalle fest:
- Pole bei $x_{P1} = -1$ und $x_{P2} = 1$
- Wendepunkt bei $x_{WP} = 0$

Intervalle	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 + 3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2 - 1)^3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Krümmung	$\circlearrowright$	$\circlearrowleft$	$\circlearrowright$	$\circlearrowleft$

2.10 Zeichnen des Graphen G_f von $f(x)$ mit Asymptoten